Endliche geometrische Reihen 275 mathe wissen 15

ist Konstant

→ geometrische Reihe: ∀ zwei direkt aufeinanderfolgende Elemente selbst

$$S_n = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \dots + a\cdot q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a\cdot q^{k-1} = a\cdot\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

bsp:

$$S_6 = 100 + 100\cdot 1{,}1 + 100\cdot 1{,}1^2 + 100\cdot 1{,}1^3 + 100\cdot 1{,}1^4 + 100\cdot 1{,}1^5 =$$

$$\sum_{k=1}^{6} 100\cdot 1{,}1^{k-1} = 100\cdot\sum_{k=1}^{6} 1{,}1^{k-1} \Rightarrow$$ 100 Kann ausgeklammert werden

d.h. $S_6 = 100\left(1{,}1^0 + 1{,}1^1 + 1{,}1^2 + 1{,}1^3 + 1{,}1^4 + 1{,}1^5\right)$

~~das Anfangsglied $1{,}1^0$ vorerst ignorieren~~

~~fa~~ quotient q als summe schreiben $(1{,}0+0{,}1)^n \Rightarrow$

$$(1+0{,}1)^0 + (1+0{,}1)^1 + (1+0{,}1)^2 + (1+0{,}1)^3 + (1+0{,}1)^4 + (1+0{,}1)^5$$

binomische Formel ⇒

$(1)+$ Pot ^{0}

$(1+0{,}1)+$ Pot ^{1}

$(1^2 + 2\cdot 1\cdot 0{,}1 + 0{,}1^2)+$ Pot ^{2}

$(1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 1^1\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3)+$ Pot ^{3}

$(1^4 + 4\cdot 1^3\cdot 0{,}1 + 6\cdot 1^2\cdot 0{,}1^2 + 4\cdot 1^1\cdot 0{,}1^3 + 0{,}1^4)$ Pot ^{4}

$(1^5 + 5\cdot 1^4\cdot 0{,}1 + 10\cdot 1^3\cdot 0{,}1^2 + 10\cdot 1^2\cdot 0{,}1^3 + 5\cdot 1^1\cdot 0{,}1^4 + 0{,}1^5) =$

$$6 + 15\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}1^2 + 15\cdot 0{,}1^3 + 6\cdot 0{,}1 \overset{?}{=} (1+0{,}1)^6 =$$

$$1 + 6\cdot 0{,}1 + 15\cdot 0{,}1^2 + 20\cdot 0{,}1^3 + 15\cdot 0{,}1^4 + 6\cdot 0{,}1^5 + 1\cdot 0{,}1^6$$

$$S_n = a\cdot\frac{q^n - 1}{q-1}$$

Vollständige Induktion anwenden (von $n \to n+1$)

~~$S_n = a \frac{(1+\Delta)^n \dots}{\Delta}$~~ zu beweisen $S_{n+1} = a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$q := 1+\Delta$

$$S_n = a\cdot\frac{(1+\Delta)^n - 1}{\Delta} = \frac{1 + \binom{n}{1}\cdot 1\cdot\Delta + \binom{n}{2}\cdot 1\Delta^2 + \binom{n}{3}\cdot 1\cdot\Delta^3 + \dots + \binom{n}{n}\cdot\Delta^n - 1}{\Delta}$$

addieren n+1 glied

$$S_{n+1} = a\cdot\frac{(1+\Delta)^n - 1}{\Delta} + a(1+\Delta)^n = a\left[\frac{(1+\Delta)^n - 1}{\Delta} + (1+\Delta)^n\right]$$